Александр Горчаков. Статистические аспекты построения и оптимизации механистических торговых систем.

Вступительное слово.

Своим докладом я преследую цель обратить внимание, прежде всего тех людей, кто решил сделать системный трейдинг своей профессией, на необходимость использования в своих методах научных знаний, накопленных человечеством, прежде всего математических знаний.

Поэтому мой доклад разделен на две части, первая из которых в б**о**льшей степени содержит критический взгляд на некоторые распространенные подходы к оценке торговых систем и преследует своей целью обратить ваше внимание на некорректности, тиражируемые в популярной литературе по трейдингу и в целом ряде популярных программ технического анализа и не только его.

Меня поражает в России практическое отсутствие переводной современной литературы по финансовой математике, особенно с приложениями в трейдинге. На Западе уже давно, наряду с популярной литературой по трейдингу, налажена и индустрия серьезных научных работ по данной проблематике, доступных для широкого круга читателей (правда, судя по тиражам, широким кругом читателей не принятая). У нас же, видимо в силу соответствующей издательской и редакторской политики, такие издания либо не делаются вовсе, либо быстро исчезают, как исчез хороший журнал «Современный трейдинг» и статьи на эту тему в журнале «Рынок ценных бумаг».

С одной стороны мне лично конечно выгодно такое положение дел, когда серьезная литература по финансовой математике расходится небольшими тиражами, а у нас так вообще практически не переводится, а популяризаторские книги выдерживают несколько крупных переизданий и их идеи закладываются в популярные программы. Ведь эти книги и программы создают иллюзию простоты торговли на рынке, ее доступности людям чуть ли не с начальным образованием, воспитывают в будущих трейдерах пренебрежение к научному знанию, преподаваемому в ВУЗах. А значит, привлекают на фондовый рынок дополнительное количество людей, убежденных, что «торговать на бирже – это просто» и из-за этого заблуждения дающих дополнительный заработок профессионалам. Но, как говорил Аристотель, «Платон мне друг, но истина дороже».

Но я покривлю душой, если скажу, что мною движет только альтруистическое желание установления истины. Дело в том, что, как в любом другом знании, честное и открытое обсуждение аспектов трейдинга в кругу людей, стремящихся привнести в него что-то новое, дает хорошую почву для профессионального роста, как слушающего, так и докладчика. Ведь без обмена идеями любая наука мертва, а трейдинг, особенно системный, на мой взгляд, все больше становится отдельным прикладным научным знанием со своими специфическими методами исследований.

Ну а западный опыт показывает, что в открытом обмене опытом между системными трейдерами нет ничего опасного, так как, как я уже отмечал выше, несмотря на доступность серьезной литературы по финансовой математике, она остается востребована лишь небольшим кругом профессионалов. Ну а в России даже создание этого круга только в самом начале пути.

Поэтому во второй части я постараюсь внести немного конструктивизма и изложить один из возможных (!) алгоритмов решения задачи оптимизации, т. е. построения оптимального портфеля из набора систем.

Итак, перейдем к первой части моего доклада, который, предупреждаю, потребует от вас знаний в объеме курса теории вероятностей в экономическом или техническом Вузе, но не более того.

1. Что мы знаем о будущем?

Рассмотрим некоторую последовательность величин, значения которых в будущем мы хотели бы спрогнозировать:

C(i), i=0,1,….,n,….,

и последовательность информации, известной к соответствующему моменту времени

Y(i), i=0,1,….,n,….,

(C(0),…,C(t)) включается в Y(t).

Теоретическими аспектами прогноза из современных наук занимается только одна наука – теория вероятностей. С ее точки зрения нашим идеальным знанием о будущем значении величины C(t+j) является условное распределение этой величины при условии Y(t).

Напомню определение условного распределения. Если распределение пары (C,Y(t)) дискретно, то условным распределением C при условии Y(t) называется случайная величина с вероятностями исходов

P(C|Y(t))=P(C,Y(t))/P(Y(t)).

А если распределение пары (C,Y(t)) непрерывно, то условным распределением C при условии Y(t) называется случайная величина с плотностью

p(C|Y(t))=p(C,Y(t))/p(Y(t)), где p (маленькое) – плотность соответствующего распределения.

Отметим, что в частном случае, когда C является некоторой детерминированной функцией f от Y(t) это условное распределение представляет собой вырожденное распределение, сосредоточенное в одной точке – f(Y(t)). Таким образом, наше идеальное знание о будущем, определяемое как условное распределение, включает в себя и детерминированный случай, как частный случай распределения.

В этом месте я хотел бы сделать маленькое отступление, которое связано с недопониманием самой модели случайности многими людьми, далекими от теории вероятностей. Когда мы говорим об условном распределении, заданным приведенными выше формулами, то часто возражением против них является:

А на каком основании Вы пишите в знаменателе P(Y(t)) (p(Y(t))), если информация Y(t) нам известна точно и не может быть изменена и вообще о какой случайности Y(t) в этом случае можно говорить?

Этот вопрос характеризует непонимание самой причины введения случайности в науку. Ведь грань между случайностью и детерминированностью проходит не в прошлом, а в будущем. Если бы мы для любого t при известном Y(t) могли бы однозначно предсказать Y(t+1), то приведенный выше вопрос был бы правомерен и мы действительно имели бы дело с полной детерминированностью, являющейся частным случаем уже упоминавшегося выше случая C=f(Y(t)), для которого упомянутые выше формулы привели нас к вырожденному распределению. А вот если этого не происходит, т. е. при известном Y(t) мы не можем однозначно предсказать Y(t+1), (а чаще всего при изучении процессов, связанных с деятельностью большого числа людей, мы имеем этот случай), то единственной человеческой моделью, созданной для изучения такого случая, является модель случайности и наша формула и само понятие идеального знания о будущем в рамках этой модели абсолютно корректны.

Я прекрасно понимаю, что с бытовой точки зрения очень сложно воспринять, что все, что мы знаем о будущем, т. е. идеальный прогноз – это набор событий с вероятностями их появления, причем для большинства возможных событий эта вероятность ненулевая, т. е. в принципе в будущем может произойти любое из них. Именно этим неприятием научного понятия прогноза и объясняется тяга людей к различным экстрасенсам, «гуру» и т. п. людям, дающим «точные» прогнозы – будет то-то и так то. В силу этого заблуждением среди трейдеров, особенно начинающих или после полосы неудач, начинает доминировать мнение, что существуют «профессионалы» (часто называемые «кукловодами»), которые знают о будущем поведении цен, если не все, то почти все. Конечно, если профессионал-трейдер делает свыше 50% оборота в каком-нибудь эмитенте, то он обладает этим знанием, но такой профессионал вряд ли поделится этим знанием открыто. А вот о «профессионализме» тех, кто не делает таких оборотов, но с упорством достойным лучшего применения постоянно выдает «на гора» «точные» прогнозы, выводы сделайте сами. И чем раньше вы осознаете справедливость ставшей крылатой поговорки Олега Гущина: «У меня для вас две новости – плохая и хорошая. Плохая – прогнозировать цены (в бытовом смысле – прим. мое) НЕЛЬЗЯ, а хорошая состоит в том, что для того, чтобы зарабатывать на рынке, этого и не нужно», тем быстрее станете профессионалом.

И в заключение данного пункта, чтобы снизить «градус» научности доклада, предлагаю под другим углом зрения взглянуть на старый анекдот про аналитика и трейдера. «Трейдер вбегает в лифт и видит стоящего у кнопок аналитика. Он зло на него смотрит и говорит: «Ну, теперь то ты, наконец, скажешь точно вверх или вниз?». Кажется, что этот анекдот про нерадивого аналитика, а на самом деле с изложенной в этом пункте точки зрения гораздо более нерадивым в анекдоте является именно трейдер, верящий, что хороший аналитик и «гуру» - это одно и то же.

Вывод. Нашим идеальным знанием о будущем значении прогнозируемой величины является условное распределение этой величины при условии всей априорно известной информации и только оно.

Рассмотрим с этой точки зрения, что представляет собой торговая стратегия.

2. Что такое торговая стратегия и что ее характеризует?

Рассмотрим цену произвольного актива
C(i), i=0,1,….,n,….,

Представляющую собой последовательность действительнозначных случайных величин

и последовательность информации, известной к соответствующему моменту времени

Y(i), i=0,1,….,n,….,

такой, что

(C(0),…,C(t)) включается в Y(t).

Самофинансируемым портфелем мы назовем портфель из двух активов

(S(i) («бумаги», в том числе и отрицательные значения при шорте), B(i) (деньги, в том числе и отрицательные значения при плече)), такой, что для любого i больше 0

(S(i)-S(i-1))*C(i)+(B(i)-B(i-1))=0

т. е. изменение стоимости самофинансируемого портфеля за 1 шаг

(S(i)*C(i)+B(i))-(S(i-1))*C(i-1)+B(i-1))

равно изменению стоимости актива за 1 шаг, умноженному на число бумаг (при шорте на число проданных бумаг) в портфеле в предыдущий момент времени

S(i-1)*(C(i)-C(i-1))

и прирост и убыток достигается только за счет изменения стоимости актива, но не ввода-вывода средств.

Стратегией для самофинансируемого портфеля на активе с начальным капиталом К назовем последовательность действительнозначных функций,

S(i)=S(Y(i)),

равных «числу» бумаг в портфеле перед i+1 шагом, для которой имеет место условие

K=S(0)*C(0)+B(0).

Действительнозначность S(i) нужна нам для последующих рассуждений, а погрешностью, возникающей из-за необходимости округления этой функции до целого числа при практическом применении, мы пренебрежем, так как при возможности покупки и продажи большого числа лотов, эта погрешность, в общем, непринципиальна.

Очевидно, что для финансируемой стратегии |S(i)| меньше, либо равен a*K(i)/C(i), где a>=1 – параметр определяемый маржой, предоставляемой брокером. Тогда S(i) можно переписать в виде r(Y(i))*a*K(i)/C(i), где 1>=|r(Y(i)|>=0.

Тогда доходность стратегии за 1 шаг перепишется в виде

(K(t+1)-K(t))/K(t)=a*r(Y(t))*d(t+1), где d(t+1)=(C(t+1)-C(t))/C(t).

Предположим, что a=1. В этом случае единственным параметром в формуле доходности, который может выбрать трейдер, является функция r, которая рассчитывается на каждом такте работы стратегии. А, как мы помним из предыдущего пункта, идеальным знанием трейдера о величине d(t+1) является условное распределение d(t+1) при условии Y(t). Таким образом, **любая торговая стратегия для самофинансируемого портфеля представляет собой ни что иное, как явную или неявную оценку трейдером условного распределения d(t+1) при условии Y(t) и (или) его отдельных параметров.** Или, как совершенно справедливо написал Юрий Макаров, «любая торговая система прогнозирует рынок».

Отметим, что в случае, когда r(Y(t)) может принимать три возможных значения – 0, 1 и –1, мы имеем дело с механистической торговой системой. Также подчеркнем, что какие именно оценки строит трейдер можно понять только зная цели, которые он преследует. Например, если трейдер преследует цель построить систему с максимальной средней доходностью, не задумываясь о риске, то система должна оценивать знак среднего условного распределения d(t+1) при условии Y(t). Если трейдер хочет построить систему с максимальной средней доходностью при ограничении дисперсии доходности на 1 шаг, то он должен строить оценку отношения модуля среднего условного распределения d(t+1) при условии Y(t) на его дисперсию (на первый взгляд для человека не чуждого математической статистики кажется парадоксальным, что в знаменателе стоит не стандартное отклонение (т. е. корень из дисперсии), а именно сама дисперсия, но строгое математически можно показать, что это так) и т. д.. Подробнее отдельные примеры того, какие оценки должен строить трейдер при некоторых ограничениях на риск, рассмотрены в моей статье «Об оптимальной торговой стратегии при некоторых ограничениях на риск»

Из приведенной формулы видно, что если система строится независимо от условного распределение d(t+1) при условии Y(t) и среднее r(Y(t)) равно нулю, то и средняя доходность такой системы будет равна нулю. Например, если открывать позиции при помощи бросания идеальной монетки (орел – лонг (r(Y(t)=1), решка-шорт (r(Y(t)=-1)), то средняя доходность такой торговой системы будет равна нулю, а стандартное отклонение доходности на один такт совпадает с доходностью стратегии «купил и держи». О последней системе следует сказать особо. Часто ее положительная доходность на достаточно длинном историческом периоде используется, как аргумент против высказанного выше тезиса, что любая система является явной или неявной оценкой параметров условного распределения изменения цены, ведь, по мнению оппонентов нашего тезиса, величины r(Y(t) в ней не зависят от параметров условных распределений. Это заблуждение. Положительная доходность стратегии «купил и держи» на достаточно длинном историческом периоде объясняется тем доказанным временем фактом, что на этом периоде сумма средних условных распределений d(t+1) при условии Y(t) – положительна.

Последний факт указывает нам на то, что не стоит обольщаться положительной доходностью любой системы «только лонг», даже если стандартное отклонение доходности этой системы меньше, чем у стратегии «купил и держи». Например, если открывать лонг по бросанию идеальной монетки (орел – лонг (r(Y(t)=1), решка-аут (r(Y(t)=0)), то стандартное отклонение доходности этой системы на 1 такт в корень из двух раз меньше стандартного отклонения доходности стратегии «купил и держи», правда, при этом средняя доходность уже в 2 раза меньше доходности стратегии «купил и держи». Что, кстати, на участках падающих цен приводит к тому, что последняя система выглядит лучше «купил и держи» и этот факт даже может создать иллюзию, что построенная система имеет право на жизнь.

Приведенные рассуждения дают нам простейший и самый предварительный критерий отсева неудачных систем «только лонг» («только шорт»):

если отношение средней доходности системы «только лонг» («только шорт») на один такт к стандартному отклонению этой величины меньше либо равна аналогичному отношению у стратегии «купил и держи» («открыл шорт и жди»), то никаких новых закономерностей в ряде цен по сравнению с системой «купил и держи» («открыл шорт и жди») наша система не нашла.

Здесь я хотел бы отметить, что данный критерий совершенно корректно использовать, например, для предварительного анализа управления ПИФами, так как последним разрешена игра «только лонг».

В заключение нашего пункта отметим вытекающую из приведенных формул связь между математическим определением эффективного рынка и доходностью самофинансируемого портфеля. Рынок называется эффективным, если для любого t среднее условного распределение d(t+1) при условии Y(t) равно некоторой константе d, независящей от t и Y (t). С точки зрения доходности самофинансируемой стратегии, это означает, что рынок эффективен тогда и только тогда, когда не существует самофинансируемых стратегий со средней доходностью на 1 такт больше, чем у доходности стратегии «купил и держи», умноженной на параметр a, определяемый маржой.

Выводы:

а. Любая торговая стратегия явно или неявно представляет собой оценку трейдером условного распределения изменения цены в следующей момент времени при условии имеющейся у него априорной информации и (или) отдельных параметров этого распределения.

б. Исчерпывающей информацией о «хорошести» конкретных оценок (читай торговой стратегии или механистической торговой системы), сделанных трейдером, является кривая эквити K(t), построенная на всех прошлых значениях t, на которых трейдером принималось решение о смене и сохранении позиции и только она.

Из п. б следует, что надо очень осторожно подходить к выбору параметров, по которым оценивается качество торговой стратегии. Поэтому в следующем пункте мы обратим ваше внимание на типичные ошибки в этой области.

3. Об ошибочности отбора механистических торговых систем по статистике сделок и максимальной просадке счета

Как мы видели в предыдущем пункте, трейдер оценивает будущее изменение цены на каждом такте работы системы, однако решение о «хорошести» системы в целом (читай «хорошести» собственных оценок) зачастую принимается на основе таких характеристик кривой эквити, как

- максимальная просадка счета, которая к тому же часто считается по статистике сделок;
- доля прибыльных сделок;
- отношение средней прибыльной сделки к средней убыточной;
- максимальное число подряд идущих прибыльных и убыточных сделок;
- отношение доходности к доходности некоторой «идеальной системы».

Но с точки зрения математической статистики все эти характеристики сильно редуцируют информацию, заложенную в кривой эквити. Например,

- **максимальная просадка счета** – единичное событие на множестве испытаний, а значит нет никаких гарантий, что она не будет превзойдена в будущем, кроме того, на основе этого критерия мы можем отбросить систему лишь однажды имевшую большую просадку из-за редкого неблагоприятного события и оставить систему постоянно делающую большие просадки, но меньше максимума предыдущей (кроме того, следует помнить, что максимальная просадка счета, полученная по статистике сделок, заведомо меньше либо равна максимальной просадке счета в кривой эквити системы);
- **любая статистика сделок** – это статистика только по тем тактам, когда система меняла позицию, т. е. только по оценкам будущего изменения цены в эти такты, в то время как решение о несмене позиции тоже является оценкой трейдером параметров условного изменения цены в следующий момент времени и эти такты остаются вне нашего анализа.

И даже использование нескольких подобных параметров в совокупности не гарантирует нам ошибки при оценке «хорошести» системы.

Приведем только один пример ошибки, которую мы можем допустить, используя такие характеристики, как доходность, максимальная просадка счета по статистике сделок, отношение средней прибыльной сделки к средней убыточной. Уже давно принято считать, что для поступательных (чаще называемых «трендовыми») систем доля прибыльных сделок не важна, но очень важны отношение средней прибыльной сделки к средней убыточной, максимальная просадка счета, общая доходность и возможно, среднее время в позиции. Отчасти это верно, но если мы будем отбирать систему только на основе последних 4 параметров, то из большого множества систем мы можем выбрать не поступательную систему, а систему, удачно входящую перед сильными движениями цен за 1-2 момента времени. Наличие большого числа убыточных сделок с маленьким временем сидения в позиции сделает практически неотличимым среднее время в позиции у этой системы и поступательной, отношение средней прибыльной сделки к средней убыточной у непоступательной системы может оказаться существенно выше, а число сделок, доходность и максимальная просадка счета сравнимы с лучшей поступательной системой и даже лучше, чем у последней. И отобрав непоступательную систему, мы потом будем долго удивляться, почему она не входит в лонг или шорт на участках совершенно очевидных долгих пологих движений цен и думать, что «свойства рынка изменились». А ведь это просто наша ошибка – «за что боролись, на то и напоролись». И этой ситуации можно было избежать, если б мы добавили всего один параметр в критерии оценки – долю положительных изменений кривой эквити системы. Совершенно очевидно, что непоступательная система была бы в этом случае нами отсеяна – ее кривая эквити имела бы гораздо более ступенчатый вид.

Конечно, подобной ошибки можно избежать и если строить системы только на индикаторах, «настроенных» на улавливание именно поступательных движений цен, как, например, скользящие средние от их относительных изменений или что тоже самое – угл наклона скользящей средней от самих цен. Но бывает, что трейдер, особенно начинающий, об этом не задумывается и набирает для построения систем много разных индикаторов – от осцилляторов и «волновых» индикаторов до модных в последнее время «черных ящиков» типа нейронных сетей и фрактальных моделей. И при таком подходе к построению систем вероятность ошибки при отборе на основе упомянутых нами характеристик становится неоправданно высокой.

Вывод. Отбор оптимальных торговых систем надо проводить только на основе статистически корректных характеристик кривых эквити систем, упомянутых в п. 2. К статистически некорректным характеристикам кривой эквити можно отнести такие часто используемые характеристики, как

- **максимальная просадка счета, особенно если она считается по статистике сделок;**
- **доля прибыльных сделок;**
- **отношение средней прибыльной сделки к средней убыточной;**
- **максимальное число подряд идущих прибыльных и убыточных сделок;**
- **среднее время сделки.**

От критической части нашего доклада перейдем к его конструктивной части.

4. О корректном построении оптимальной торговой системы из набора систем

a. Случай одного актива

Предположим, что мы строим набор торговых систем (например, меняя параметры в алгоритме) на одном активе и перед нами стоит задача выбора наилучшей системы или наилучшего портфеля систем из построенных, т. е. задача оптимизации.

Естественно, что неопределенность понятия «наилучшей» может задавать нам разные предпочтения, однако, задав естественное предположение об этих предпочтениях, можно свести задачу оптимизации к стандартным статистическим процедурам в рамках некоторых тоже вполне естественных предположений о будущей доходности.

Со времен революционной работы Марковитца принято считать, что инвестора интересуют две составляющие торговли – доход и риск. Мы не будем в рамках нашего доклада останавливаться на преимуществах и недостатках различных понятий дохода и риска, которые рассматриваются современной финансовой математикой, далеко ушедшей вперед по сравнению с Марковитцем, предложившим использовать в качестве дохода – будущую среднюю доходность, а в качестве риска – стандартное отклонение доходности. Но подчеркнем одно общее присущее всем современным работам в области финансовой математики по доходу и риску:

доход и риск - являются средними некоторых функций на распределении будущей доходности за некоторый период m.

Как следует из п. 1, взятие в качестве дохода и риска средних некоторых функций на распределении будущей доходности за некоторый период m оправданно, так как нашим идеальным знанием о будущей доходности является ее условное распределение при условии всей известной к настоящему моменту информации.

Однако, как следует из п. 3, это должны быть такие величины, которые можно корректно статистически оценить по прошлым значениям кривой эквити в предположении совпадения этих параметров с аналогичными параметрами на каких-то достаточно длинных участках кривой эквити в прошлом. Отметим, что без последнего предположения задача оценки будущих дохода и риска вообще не имеет решения, по крайней мере, в рамках современной математики.

Сформулируем наши основные предположения о доходе и риске, как средних некоторых функций на распределении доходности.

Предположение 1. Естественно, предположить, что если функция распределения доходности одной торговой системы меньше, либо равна функции распределения другой торговой системы, то доход первой торговой системы не меньше, чем доход второй торговой системы, а риск у первой торговой системы не выше, чем у второй. Т. е. вторая система заведомо хуже первой.

Это достаточно простое предположение о свойствах функций дохода и риска, по необъяснимым для меня причинам редко встречается в русскоязычной литературе по доходу и риску. Более того, из работы в работу перетекает, в общем случае ошибочное утверждение – «чем выше доход, тем выше риск».

Мы же для рассмотренного нами условия, функция распределения доходности первой системы меньше, либо равна функции распределения второй системы де-факто формулируем обратное:

- «чем выше доход, тем ниже риск».

Но в серьезной англоязычной финансовой математике такое соотношение между функциями распределения используется именно для задач оптимизации портфеля по доходу и риску уже как минимум 25 лет. Условие «функция распределения доходности первой системы меньше, либо равна функции распределения второй системы» в финансовой литературе получило название first order stochastic dominance (стохастическое доминирование первого порядка) первого распределения над вторым и часто обозначается, как FSD.

И если взглянуть внимательнее на наше предположение, то оно достаточно естественно. Ведь функция распределения – это вероятность, что случайная величина меньше некоторого заданного x, а значит для любого наперед заданного x вероятность, что доходность первой системы будет больше x БОЛЬШЕ, ЛИБО РАВНА аналогичной вероятности у второй системы и наоборот вероятность, что доходность первой системы меньше x МЕНЬШЕ ЛИБО РАВНА аналогичной вероятности у второй. И какие бы известные доход и риск мы не рассматривали (как средние некоторых функций на распределении доходности), мы увидим, что доход у первой системы больше, либо равен доходу второй, а риск первой системы меньше, либо равен риску второй.

В то же время это предположение дает нам возможность отсеивания «плохих» систем при условии, если мы знаем функцию распределения доходности. Конечно мы ее не знаем точно, но при некоторых дополнительных условиях мы можем ее достаточно точно оценить.

Кроме того, часто для многих рассматриваемых в финансовой математике видов дохода и риска условие FSD оказывается избыточным и для отсева систем с заведомо меньшим доходом и бОльшим риском можно использовать более слабое соотношение между функциями распределения - second order stochastic dominance (SSD).

Говорят, что первое распределение стохастически доминирует вторым порядком над вторым распределением, если для любого x среднее функции $(x-y)*I(y<x)$, I –

индикатор события, на первого распределении меньше либо равно аналогичному среднему на втором.

В финансовой литературе также встречается и другое определение SSD, эквивалентное приведенному. Говорят, что первое распределение стохастически доминирует вторым порядком над вторым распределением, если для любого x интеграл от первой функции распределения от минус бесконечности до x меньше, либо равен аналогичного интеграла от второй функции распределения.

Как и для случая FSD, SSD дает нам возможность отсева «плохих» систем для многих используемых видов дохода и риска.

Здесь я хотел бы выразить благодарность Тимуру Бакееву, который обратил мое внимание на то, что введенное мною в статье на сайте предположение 1 является известным в финансовой математике соотношением FSD.

Перейдем непосредственно к алгоритму оптимизации. Зададим проскальзование, имеющее место на данном активе для нашего объема средств, и комиссию на сделку, и для каждой из систем рассчитаем кривую капитала (эквити) для данной системы, которая имела место в прошлом – K(t,j) в моменты времени t=0,1,2,…,T, когда хотя бы одной из систем принималось решение о смене или несмене позиции, j – порядковый номер системы, j=0,1,2,…,N.

Относительно последовательности векторов (K(t,j), j=0,1,2,…,N), t=0,1,2,…, сделаем два предположения. Сразу отметим, что эти предположения носят научный теоретико-вероятностный характер и нужны нам лишь для обоснования корректности предлагаемого алгоритма. Поэтому слушателю, неискушенному в теории вероятностей и не желающему тратить на нее время, я рекомендую не задумываться над этим (а при чтении пропустить мелкий текст ниже и сразу перейти к сформулированной теореме).

Итак

Предположение 2. Последовательность векторов (K(t+1,j)/K(t,j), j=0,1,2,…,N), t=0,1,2,…, – стационарна в узком смысле, т. е. для любых t(1) и t(2) распределения векторов (K(t(1)+1,j)/K(t(1),j), j=0,1,2,…,N) и (K(t(2)+1,j)/K(t(2),j), j=0,1,2,…,N) – совпадают.

Предположение 3. Последовательность векторов (K(t,j), j=0,1,2,…,N), t=0,1,2,…, – слабо зависима с коэффициентом слабой зависимости a(t)=МИН (1,b(t))*exp{-a*t)), b(t) – ограниченная неотрицательная невозрастающая функция от t, т. е. для любых t(1) меньше t(2) и t(2)-t(1)=t распределение вектора

(K(t(1)+1,j)/K(t(1),j), (K(t(2)+1,j)/K(t(2),j), t1=0,1,…,t(1), t2=t(2), t(2)+1,…, j=0,1,2,…,N)

отличается от распределения того же вектора, в предположении, что вектора

(K(t1+1,j)/K(t1,j) t1=0,1,…,t(1), j=0,1,2,…,N) и (K(t2+1,j)/K(t2,j), t2=t(2), t(2)+1,…, j=0,1,2,…,N),

независимы, на величину не превосходящую a(t) (отметим, что 1 – тривиальная оценка сверху для этого отличия и потому взятие МИН в формуле для a(t) выше не ограничивает нас никаким образом).

Примечание 1. Очень часто возражением против стационарности в узком смысле является утверждение типа: «доходность нестационарна, так как для растущего и падающего рынка мы будем иметь разные доходности». Это возражение некорректно, так как в нем речь идет НЕ О БЕЗУСЛОВНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ K(t+1,j)/K(t,j), а об УСЛОВНОМ, т. е. при условии соответствующего состояния рынка. Однако, как давно показано в теории вероятностей, различие условных распределений вовсе не означает нестационарность безусловных.

Примечание 2. Часто возражением против слабой зависимости является возражение типа: «какая может быть слабая зависимость, если мы в момент времени t «в деньгах», то с вероятностью 1

К(t+1,j)/К(t,j)=1?». И снова этим возражением путается зависимость на 1 шаг со слабой зависимостью. Ведь близости к независимости на 1 шаг никто не обещал. А аналогичное утверждение на достаточно большое число шагов k: «если мы в момент времени t (!) «в деньгах», то с вероятностью 1 К(t+k+1,j)/К(t+k,j)=1» вряд ли кто-нибудь возьмется сформулировать, как истинное.

Примечание 3. Косвенным подтверждением корректности предположения о слабой зависимости может быть экспоненциальное убывание автокорреляционной функции для каждой из последовательностей К(t+1,j)/К(t,j). В то же время отсутствие такого убывания хотя бы для одного j укажет нам на несоответствие модельного предположения реальности.

Примечание 4. Условию слабой зависимости удовлетворяет подавляющее большинство зависимых последовательностей, изучаемых в теории вероятностей и имеющие приложения в самых разных областях, в частности, цепи Маркова и АРПСС-модели. Поэтому это условие взято нами «не с потолка», а является естественным обобщением целого ряда зависимостей, возникающих в реальном мире.

Примечание 5. В условиях слабой зависимости и большом k безусловное распределение доходности СУММ (w(j)*К(T+m+k,j))/СУММ (w(j)*К(T+k,j)) является нашим единственно возможным апостериорным знанием в момент времени T о будущей доходности портфеля систем с момента времени T+k до T+k+m.

В рамках предположений 2 и 3 известна предельная теорема, что при достаточно большой величине (T-m)/СУММ{a(t), t=0,1,…}>>100 для любых w(j), СУММ (w(j))=1, w(j) больше либо равно 0, выборочное распределение СУММ (w(j)*К(t+m,j))/СУММ (w(j)*К(t,j)), построенное по последовательности СУММ (w(j)*К(t+m,j))/СУММ (w(j)*К(t,j)), t=0,1,…,T, практически совпадает с безусловным распределением СУММ (w(j)*К(t+m,j))/СУММ (w(j)*К(t,j)) (в силу предположения 2 последнее распределение тоже стационарно, т. е. не зависит от t).

Примечание 6. Отметим, что важно считать именно выборочные распределения СУММ (w(j)*К(t+m,j))/СУММ (w(j)*К(t,j)), так как они могут существенно отличаться от распределения ПРОИЗВ (СУММ (w(j)*К(t+i,j))/СУММ (w(j)*К(t+i-1,j)), i=1,2,3,…,m), в предположении, что множители НЕЗАВИСИМЫ – так как скользящие произведения в слабо зависимых последовательностях и независимых, как правило, имеют РАЗЛИЧНЫЕ распределения, даже при совпадении одномерных распределений СУММ (w(j)*К(t+1,j))/СУММ (w(j)*К(t,j)), i=1,2,3,…,m), т. е. таким образом мы еще и учитываем зависимости в приращениях эквити за m шагов.

Таким образом, в рамках сделанных предположений статистически корректный алгоритм отбора оптимальных портфелей выглядит следующим образом.

Алгоритм 1

На первом шаге мы выбираем некоторый вектор w(j), СУММ (w(j))=1, w(j) больше либо равно 0, и отбрасываем все такие вектора v(j), СУММ (v(j))=1, v(j) больше либо равно 0, что выборочная функция распределения СУММ (w(j)*К(t+m,j))/СУММ (w(j)*К(t,j)) стохастически доминирует (первым или вторым порядком – в зависимости от выбранных дохода и риска) над выборочной функцией распределения СУММ (v(j)*К(t+m,j))/СУММ (v(j)*К(t,j)).

На следующем шаге выбираем из оставшегося множества другой вектор w(j), СУММ (w(j))=1, w(j) больше либо равно 0, и повторяем эту процедуру для оставшегося множества.

И на выходе мы получим такие наборы w(j), СУММ (w(j))=1, w(j) больше либо равно 0, для которых либо выборочные функции распределений СУММ (w(j)*К(t+m,j))/СУММ (w(j)*К(t,j)) (случай FSD), либо интегралы от этих функций (случай SSD) обязательно пересекаются. И из этих портфелей мы уже выбираем оптимальную, исходя из наших конкретных дохода и риска.

Но этот алгоритм имеет слишком большую трудоемкость, если N велико, а выбор w(j), СУММ (w(j))=1, w(j) больше либо равно 0, на каждом шаге происходит по принципу «как Бог на душу положит».

Предварительный отсев систем

В то же время почти всегда среди наших систем присутствуют системы с большой выборочной корреляцией последовательностей К(t+m,j)/К(t,j) для разных j. Одновременное включение таких систем в портфель несет в себе явную избыточность портфеля. Поэтому естественной редукцией числа систем является выбор только систем с относительно небольшой корреляцией. Этот отбор можно осуществлять стандартными методами линейной регрессии в условиях мультиколлениарности (методы присоединения, присоединения-удаления, удаления), если мы в качестве предсказываемой величины возьмем «идеальную» последовательность доходностей с таким выборочным распределением, что выборочная функция распределения этой последовательности сстохастически доминирует первым порядком над выборочной функции распределения СУММ (w(j)*К(t+m,j))/СУММ (w(j)*К(t,j)) при любом фиксированном w(j) и для каждого t совпадает с хотя бы одной величиной СУММ (w(j)*К(t+m,j))/СУММ (w(j)*К(t,j)). Из неравенства Йенсена следует, что в качестве такой последовательности можно взять последовательность D(t)=МАКС (К(t+m,j)/К(t,j), j=0,1,…,N).

Примечание 7. Решение уравнения регрессии

D(t)=СУММ (v(j)*К(t+m,j))/К(t,j))+Ошибка(t)

мы используем лишь для отбора таких v(j), которые в этом уравнении должны быть существенно отличны от нуля и поэтому на этом этапе в ограничении СУММ (v(j))=1, v(j) больше либо равно 0, нет необходимости, что позволяет нам использовать на этом этапе процедуры линейной регрессии с методами присоединения, присоединения-удаления, удаления, заданные практически в любом стандартном статистическом пакете, например, в SPSS (обозначения методов Stepwise, Forward, Backward, Remove).

Также при применении этих процедур надо расставить приоритеты при отсеве систем. В частности, если вклад двух систем в итоговый результат статистически близок, то отставлять следует системы, для которых выборочные распределения К(t+m,j))/К(t,j) стохастически доминируют (в смысле FSD или SSD) над отбрасываемыми.

Примечание 8. Если на этом этапе мы найдем j такой, что

D(t)=К(t+m,j))/К(t,j)

то наша задача выбора оптимальной стратегии решена.

Примечание 9. Если выборочное распределение D(t) не удовлетворяет нашем условиям на доход и риска, то работу по построению торговых систем надо начинать сначала.

Отсеяв на этом этапе (N-N1)~N систем, мы оставляем для дальнейшей обработки небольшое число N1 «существенных» систем.

Модифицированный алгоритм 1

Далее мы начинаем применять алгоритм 1, выбирая на первом шаге такой набор w(j), СУММ (w(j))=1, w(j) больше либо равно 0, что

СУММ (СУММ (w(j)*(К(t+m,j)-К(t,j))*D(t)),j=0,1,..N1)^2, t=0,1,…,T)

минимальна, т. е. такой портфель, который имеет наименьшее среднеквадратичное отклонение от «идеального» с доходностями D(t).

При небольшом N1 найти такой набор легко в Excel поиском решения.

Доходности это портфеля СУММ (w(j)*К(t+m,j))/СУММ (w(j)*К(t,j)). мы обозначим D(t,1).

На втором этапе мы в качестве начального набора w(j), СУММ (w(j))=1, w(j) больше либо равно 0, берем такой набор, что

СУММ (СУММ (w(j)*(К(t+m,j)-К(t,j))*D(t,1)),j=0,1,..N1)^2, t=0,1,…,T)

минимальна и т. д..

Опыт показал, что модифицированный алгоритм 1 заканчивает свою работу за 1-4 итерации и мы получаем сравнительно небольшой набор портфелей торговых систем с пересекающимися выборочными распределениями доходностей (случай FSD) или интегралами от них (случай SSD), из которых полным перебором выбираем лучшие с точки зрения наших конкретных дохода и риска.

Сами доход и риск, как средние некоторых функций на распределении доходностей, могут быть различными, но мне лично нравятся следующие функции:

Доход - «средняя типичная доходность» - средняя доходность после отбрасывания p(1)% максимальных и минимальных доходностей.
Риск – среднее выборочного распределения доходностей по p(2)% минимальных значений (CVar).

Примечание 10. Предположение о стационарности распределений векторов векторов (К(t+1,j)/К(t,j), j=0,1,2,…,N), t=0,1,2,…, является несколько избыточным и может быть заменено на условие «медленной изменчивости распределений». В этом случае необходимо периодически с помощью описанного алгоритма пересчитывать веса оптимальных портфелей торговых систем, отбрасывая самые ранние доходности и добавляя самые последние.

б. Случай нескольких активов

Этот случай отличается от случая одного актива только тем, что у каждого из активов может быть свое проскальзование, которые мы должны учесть при построении кривых доходности для каждого из активов. В дальнейшем алгоритм повторяет действия, описанные для случая одного актива.

Допустима и другая модификация, когда мы отбираем оптимальные портфели систем с помощью алгоритма, описанного выше, для каждого актива, а потом к объединенному по активам набору портфелей систем применяем модифицированный алгоритм 1.

Для уменьшения трудоемкости на этом этапе я предпочитаю использовать второй вариант.